Physique générale : quantique, Corrigé 1

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Les valeurs propres de M sont obtenues en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda\mathbb{1}) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (1-\lambda)^2 - 2i = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 + i \text{ et } \lambda_2 = -i \end{aligned}$$

On peut aisément déterminer deux vecteurs propres $\overrightarrow{v}_{1,2}$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_{1,2}$ en résolvant :

$$M\overrightarrow{v}_i = \lambda_i \overrightarrow{v}_i$$

$\overrightarrow{v}_1 = (1, 1-i)^T$ et $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1+i)^T$ sont deux vecteurs propres possibles correspondant aux valeurs propres λ_1 etλ_2 respectivement.

Exercice 2 : La transformée de Fourier

On peut utiliser dans les deux cas la transformée de Fourier pour une fonction non périodique :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t$$

a) Nous obtenons :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = [-\frac{A}{i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{Ai}{\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2})$$

En utilisant le formalisme d'Euler pour les nombres complexes :

$$\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

on a

$$\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t) = 2i\sin(\omega t)$$

Il s'ensuit que

$$F(\omega) = \frac{iA(-2i\sin(\omega T/2))}{\omega\sqrt{2\pi}} = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

Les zéros de la fonction $F(\omega)$ se trouvent à des valeurs de ω_n donnés par $\omega_n T/2 = \pi n$ autrement dit $\omega_n = 2\pi n/T$. Les extrema seront déterminés par l'expression suivante, qui n'est rien d'autre que la dérivée de $F(\omega)$ par rapport à ω :

$$\frac{T\cos(\omega T/2)}{2\omega} - \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega^2} = 0$$

Les fréquences des extrema sont donc données par les solutions de l'équation transcendante

$$\tan(\omega T/2) = \frac{\omega T}{2}$$

Le maximum le plus grand correspond à $\omega = 0$, où $F(0) = \frac{AT}{\sqrt{2\pi}}$

b) On va calculer séparément les valeurs positives et négatives du temps.
Cas 1 : $t < 0$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} Ae^{at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{(a-i\omega)\sqrt{2\pi}}[e^{(a-i\omega)t}]_{-\infty}^{0} = \frac{A}{(a-i\omega)\sqrt{2\pi}}$$

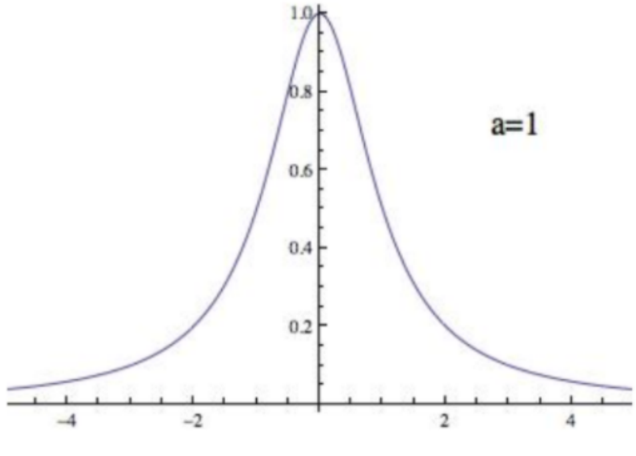
Cas 2 : $t > 0$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} Ae^{-at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(-a-i\omega)t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{(-a-i\omega)\sqrt{2\pi}}[e^{(-a-i\omega)t}]_{0}^{+\infty} = \frac{-A}{(-a-i\omega)\sqrt{2\pi}}$$

La transformée de Fourier est donc donnée par

$$F(\omega) = \frac{A}{(a-i\omega)\sqrt{2\pi}} - \frac{A}{(-a-i\omega)\sqrt{2\pi}} = \frac{2aA}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)}$$

Il s'agit d'une *Lorentzienne* : le seul maximum spectral se trouve à $\omega = 0$ et vaut $F(0) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}a}$, et la largeur spectrale (donc la fréquence pour laquelle l'amplitude est tombée à moité) est égale à $\omega = a$: $F(a) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}a} = F(0)/2$. La fonction est illustrée ci-dessous pour a=1.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-2
2
4
a=1

Exercice 3 : L'equation d'onde

1. Calculons les deux dérivées :

$$-\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ike^{i(kx-\omega_k t)}) = -k^2 e^{i(kx-\omega_k t)}$$
$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -i\omega_n e^{i(kx-\omega_k t)}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle et en simplifiant l'exponentielle, on a $\omega_k = k^2$, qui est la relation requise afin que $f(x,t) = e^{i(kx-\omega_k t)}$ soit une solution.

2. Posons la condition initiale

$$f(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \frac{A(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ixk} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$$

Nous allons calculer la transformée de Fourier à droite et à gauche de l'égalité.
Commençons par la gauche :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \frac{A(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ixk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \frac{A(k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x e^{i(k-k')x}$$

L'intégrale en dx est connue de la théorie des fonctions généralisées. Il vaut $2\pi\delta(k-k')$ où $\delta(x)$ est la fonction généralisée delta de Dirac. On a donc finalement :

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k A(k)\delta(k-k') = A(k')$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier du terme de droite. On doit calculer :

$$\frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2} - ik'x}$$

On va compléter le carré à l'exposant :

$$-\frac{x^2}{4\sigma^2} - ik'x = -(\frac{x^2}{4\sigma^2} - ik'x - \sigma^2 k^2 + \sigma^2 k^2) = -(\frac{x}{2\sigma} + i\sigma k)^2 - \sigma^2 k^2 = -\frac{(x+2i\sigma^2 k)^2}{4\sigma^2} - \sigma^2 k^2$$

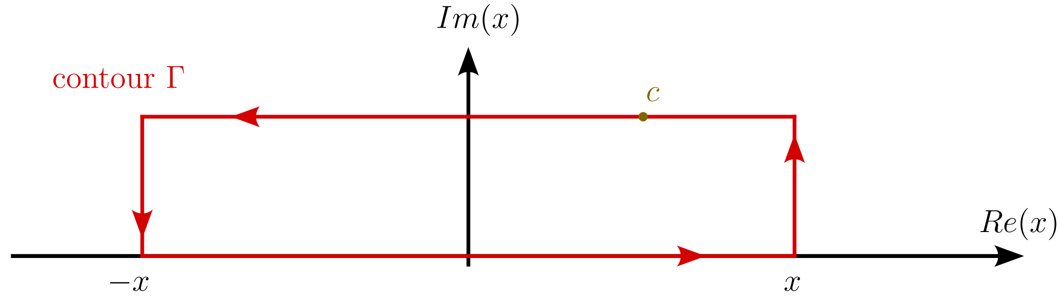
L'intégrale devient donc :

$$\frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2 k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x e^{-\frac{(x+2i\sigma^2 k)^2}{4\sigma^2}}$$

Pour calculer cette intégrale, on peut calculer une intégrale de contour dans le plan complexe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x e^{-p(x+c)^2},$$

avec p, $c \in \mathbb{C}$



$$\oint_\Gamma e^{-p(x+c)^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Car la fonction est analytique dans le contour.
Intégrale sur les deux segments verticaux :

$$Re(x) = X \to \pm\infty \Rightarrow \int \to 0$$

On a donc que :

$$\int_{-T}^{+T} \mathrm{d}x e^{-px^2} + \int_{T}^{-T} \mathrm{d}x e^{-p(c+x)^2} = 0$$
$$\Rightarrow \int_{-T}^{+T} \mathrm{d}x e^{-px^2} = \int_{-T}^{+T} \mathrm{d}x e^{-p(c+x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Pour finir, on a :

$$A(k) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\sigma^2k^2} = (\frac{2\sigma^2}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\sigma^2k^2}$$

Exercice 4 : Analyse dimensionnelle : la pendule

On remarque que g est une accélération. Elle a les dimensions d'une longueur divisée par un temps au carré : LT^{-2}. Les deux autres grandeurs ont les dimensions d'une longueur est d'une masse respectivement. Si on multiplie les trois grandeurs élevées à des puissances à déterminer, on obtient les dimensions suivantes :
$l^x m^y g^z = L^x M^y L^z T^{-2z} = L^{x+z} M^y T^{-2z}$
On souhaite obtenir une période, donc un temps T. On pose donc

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$$

d'où $z = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.
La période sera donc $T = C\sqrt{\frac{l}{g}}$ et C est une constante sans dimension. En effet, on sait que pour

des petits angles d'oscillation, on a $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
En physique, très souvent les constantes sans dimensions qui interviennent dans l'analyse dimensionnelle, sont de l'ordre de l'unité. Si dans une théorie, une telle constante doit prendre une valeur très grande ou très petite (par rapport à 1) pour expliquer les observations expérimentales, alors on dit que la théorie n'est pas "naturelle". Dans ce cas, souvent, une meilleure théorie existe.

Exercice 5 : Analyse dimensionnelle : les dimensions de la constante de Planck

Une fonction transcendante, comme par exemple l'exponentielle $y = e^x$, admet une expansion en série avec un nombre infini de termes :
$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$

Puisqu'on ne peut pas sommer des quantités de dimensions physiques différentes, tous les termes de cette série doivent être sans dimensions, comme le premier. Il faut donc que $\frac{Et}{\hbar}$ soit sans dimensions. Mais $[E] = ML^2T^{-2}$.
Si on pose $\hbar = M^xL^yT^z$, on a $ML^2T^{-1} = M^xL^yT^z$, d'où $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.
Finalement, les dimensions de $\hbar$ sont $[\hbar] = ML^2T^{-1}$.

Exercice 6 : Analyse dimensionnelle : Energie de l'explosion d'une bombe atomique

Il est raisonnable que, à l'instant zéro, l'énergie est concentrée dans un petit volume et produise dans les instants qui suivent une onde de choc qui s'étale avec une forme sphérique.
Les quantités physiques en question sont r, t, E et ρ. Les dimensions des deux dernières sont :
$[E] = ML^2T^{-2}$
$[\rho] = ML^{-3}$
On peut donc poser que le rayon r de l'explosion est fonction de t, E et ρ.
On pose :

$$r = C\rho^xE^yt^z$$

L'analyse dimensionnelle donne :

$$L = (ML^{-3})^x(ML^2T^{-2})^yT^z$$

D'où on déduit :

$$\begin{cases} 1 = -3x + 2y \\ 0 = x + y \\ 0 = -2y + z \end{cases}$$

On peut résoudre par substitution :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Donc $r = C\rho^{-\frac{1}{5}}E^{\frac{1}{5}}t^{\frac{2}{5}}$.
On peut résoudre pour E : $E = C'\frac{r^5\rho}{t^2}$ où C' est une autre constante sans dimension. A remarquer

que si $C \approx 1$, alors $C' \approx 1$ aussi. Il s'avère que la constante C' dans ce cas est très proche 1, si on la dérive d'une théorie physique. De la figure, on estime $r \approx 120$ m à $t = 0.025$ sec. On a donc :

$$E = C' \cdot 4.98 \cdot 10^{13} \text{ Joules}$$
$$E \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ Joules}$$
$$E \approx 12 \text{ kilotonnes}$$

La vraie énergie de cette bombe était de 20 kilotonnes, en bon accord avec cette analyse dimensionnelle.

Exercice 7 : Question de type examen

La réponse correcte est la réponse D. S'agissant du rapport entre deux quantités homogènes (mêmes dimensions), le rapport doit être sans dimensions. Ceci permet d'exclure automatiquement les réponses B, C, et E (cette dernière est aussi fausse car les deux termes entre parenthèses ne sont pas homogènes). Dans la limite de grand λ, le rapport $hc/\lambda k_B T$ devient petit, et une expansion de Taylor au plus bas ordre non nul des exponentielles dans les deux quantités donné immédiatement la réponse D cherchée.